ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

GETARAN BEBAS PADA STRUKTUR MDOF BANGUNAN PENAHAN GESER

Christiani Chandra Manubulu*, Rani Hendrikus, Frederikus Ndouk

Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Katolik Widya Mandira, Jl. San Juan Penfui Timur

*email :christianichandra@gmail.com**

Abstrak : Struktur MDOF tidak mengalami getaran bebas, namun pembahasan getaran bebas pada struktur derajat kebebasan dilakukan agar diperoleh beberapa karakter struktur yang penting dan sangat bermanfaat. Karakter-karakter itu adalah frekuensi sudut ω, periode getar T dan frekuensi alamistruktur. Pada penulisan, model struktur yang ditinjau adalah bangunan geser dengan derajat kebebasan dua dengan memperhatikan kondisi yang diterapkan pada bangunan penahan geser. Dari hasil analisa menggunakan perhitungan matematis dari *eigen problems*yang dibandingkan dengan hasil dari perangkat lunak SAP 2000 menunjukkan perbedaan yang sangat kecil. Sehingga dalam melalukan idealisasi bangunan dengan prinsip *shear mode* memungkinkan penggunaan model matematis yang lebih sederhana.

Kata kunci :Getaran Bebas, Struktur MDOF, Bangunan Penahan Geser

Abstract : *The MDOF structure does not experience free vibration, but the discussion of free vibration on the structure of degrees of freedom is carried out in order to obtain some important and very useful structural characters. The characters are the angular frequency ω, the vibrational period T and the natural frequency of the structure. At the time of writing, the structural model reviewed was a sliding building with two degrees of freedom with regard to the conditions applied to the sliding barrier building. From the results of the analysis using mathematical calculations of eigen problems compared to the results of SAP 2000 software showed very small differences. So that through idealizing buildings with the principle of shear mode allows the use of mathematical models that are simpler.*

Keywords: *Free Vibration, MDOF Structure, Shear Retaining Building*

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bangunan penahan geser dapat didefinisakan sebagai struktur di mana tidak terjadi rotasi pada penampang horisontal bidang lantainya [1]. Untuk mencapai kondisi tersebut, maka beberapa anggapan yang berlaku pada struktur antara lain :

1. Massa total pada struktur terpusat pada bidang lantai sehingga jumlah *degree of fredom* struktur sama dengan jumlah lantainya,
2. Balok pada lantai sangat kaku dibandingkan dengan kolom sehingga pada pertemuan balok dan kolom tidak terjadi rotasi,
3. Deformasi dari struktur tak dipengaruhi gaya aksial yang terjadi pada kolom maka balok yang kaku akan tetap pada posisi horisontal selama terjadi gerakan.

Pada dasarnya struktur adalah benda kontinum yang memiliki derajat kebebasan tak terhingga sehingga harus dinyatakan sebagai model derajat kebebasan banyak. Sistem banyak derajat kebebasan adalah sebuah sistem yang mempunyai koordinat bebas untuk mengetahui kedudukan massa lebih dari dua buah.

Walaupun getaran bebas (*free vibration system*) pada kenyataannya jarang terjadi pada struktur MDOF, tetapi membahas jenis getaran ini pada struktur MDOF akan memberikan hasil suatu besaran/karakteristik dari struktur MDOF yang selanjutnya sangat berguna untuk pembahasan respon struktur MDOF lanjutan. Besaran-besaran tersebut terutama adalah frekuensi sudut ω, periode getar T, frekuensi natural dan *normal modes*.

1.2 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari *mode shape*struktur akibat beban dinamis.
2. Membandingkan hasil perhitungan matematis dari *eigen problems* dengan hasil yang dikeluarkan oleh perangkat lunak SAP 2000.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Model struktur adalah bangunan geser dengan derajat kebebasan dua atau dengan kata lain bahwa struktur bangunan geser terdiri dari dua lantai.

ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

2. Sifat struktur dianggap seragam sepanjang bangunan, hingga analisa yang dibuat untuk kerangka tengah dapat merupakan respon untuk seluruh bangunan
3. Bangunan dimodelkan sebagai bangunan penahan geser dan dianggap sebagai bangunan yang dapat dinyatakan oleh sistem massa pegas.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Nilai Karakteristik (*Eigen Problem*)

Analisis getaran bebas pada struktur MDOF, menghasilkan matriks persamaan diferensial gerakannya seperti pada persamaan 2.1, dengan nilai ruas kanan sama dengan nol atau,

$$[m]\{\ddot{y}\}+[c]\{\dot{y}\}+[k]\{y\}=\{0\} \quad (2.1)$$

Telah diketahui bahwa frekuensi sudut pada struktur SDOF dengan redaman*(damped frequency)* ω_d nilainya hampir sama dengan frekuensi sudut pada struktur SDOF tanpa redaman ω. Hal ini terjadi apabila *damping ratio*ξrelatif kecil. Apabila hal ini diadopsi untuk struktur MDOF, maka untuk nilai c = 0, pers 8.1 akan menjadi,

$$[m]\{\ddot{y}\}+[k]\{y\}=\{0\} \quad (2.2)$$

Karena persamaan 8.2 adalah persamaan diferensial struktur MDOF tak teredam, maka penyelesaian persamaan diferensialnya hamper sama dengan penyelesaian untuk struktur SDOF, sehingga penyelesaian persamaan tersebut diharapkan dalam fungsi harmonik berbentuk,

$$y = \{\emptyset\}_i \, sin(\omega t)$$
$$\dot{y} = -\omega \{\emptyset\}_i \, cos(\omega t)$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 \{\emptyset\}_i \, sin(\omega t) \quad (2.3)$$

yang mana $\{\emptyset\}_i$ adalah suatu ordinat massa pada *mode* yang ke-i. Jika persamaan2.3 disubtitusi kedalam persamaan2.2 maka akan diperoleh,

$$-\omega^2[m]\{\emptyset\}_i \sin(\omega t)+ [k]\{\emptyset\}_i \sin(\omega t)=0$$
$$\{[k]-\omega^2[m]\}\{\emptyset\}_i = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan2.4 disebut persamaan *eigen problem* atau persamaan karakteristik atau *eigen value problem*. Persamaan2.4 adalah persamaan simultan yang harus dicari penyelesaiannya.Persamaan simultan yang homogen akan ada nilainya apabila determinan dari matriks yang merupakan koefisien dari vektor $\{\emptyset\}_i$adalah nol, sehingga,

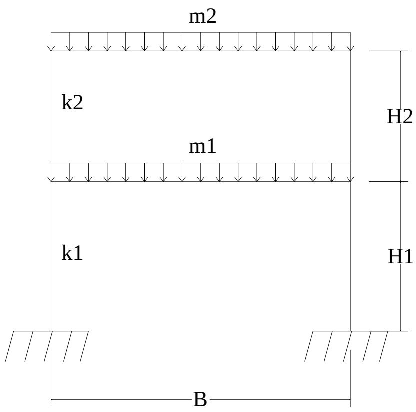
$$|[k]-\omega^2[m]| = 0 \quad (2.5)$$

Jumlah *mode/ragam* pada struktur MDOF biasanya proporsional dengan jumlah massa. *Mode* adalah jenis/pola/ragam getaran/goyangan suatu struktur MDOF. Mode merupakan fungsi dari properti dinamik struktur yang bersangkutan yakni massa dan kekakuan tingkat dan bebas dari pengaruh waktu dan frekuensi getaran. Sehingga bangunan yang mempunyai 2-tingkat misalnya, mempunyai 2 derajat kebebasan, 2 jenis “mode” gerakan dan 2 nilai frekuensi sudut yang terkait langsung dengan jenis/nomor *mode* nya. Sehingga bila jumlah derajat kebebasan struktur adalah n maka persamaan2.5 akan menghasilkan suatu polynomial pangkat n yang selanjutnya akan menghasilkan ω_i^2 untuk I = 1,2,3,…………..n. Selanjutnya subtitusi masing-masing frekuensi ω_i kedalam persamaan 2.4 akan diperoleh nilai-nilai$\emptyset_1$, $\emptyset_2$, ……….. $\emptyset_n$

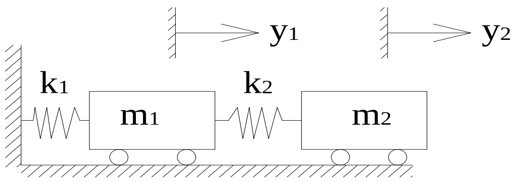
2.2 Frekuensi Sudut (ω) dan *Normal Modes*

Untuk menghitung frekuensi sudut struktur yang mempunyai derajat kebebasan banyak (MDOF), maka perlu terlebih dahulu diasumsikan bahwa struktur tersebut tak teredam atau c = 0.

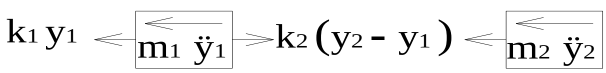
Pada penulisan ini pemodelan struktur dapat dilihat pada gambar 2.1 sebagai berikut



Gambar 1. Struktur dengan dua DOF



Gambar 2. Model sejumlah massa berpegas



Gambar 3. Diagram *free body*

Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

Jika struktur pada gambar 2.1 dikenakan beban dinamis maka struktur tersebut akan mempunyai beberapa ragam/pola goyangan. Normal modes adalah suatu istilah yang sering dipakai pada problem dinamika struktur, dan disebut sebagai ragam/pola goyangan. Berdasarkan gambar 2.3 maka kita dapat rumuskan suatu persamaan diferensial gerakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 - k_2(y_2 - y_1) = 0 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Persamaan 8.6 dapat ditulis dalam bentuk yang sederhana yaitu,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = 0 \\ m_2y_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

selanjutnya pers. 8.7 dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.8)$$

sehingga persamaan Eigen problem dari persamaan2.8 adalah,

$$\begin{bmatrix} (\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2) - \omega^2\mathrm{m}_1 & \mathrm{k}_2 \\ -\mathrm{k}_2 & \mathrm{k}_2 - \omega^2\mathrm{m}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.9)$$

dimanaΦi adalah nilai atau ordinat yang berhubungan dengan massa ke-i pada ragam/pola goyangan massa ke-i. persamaan2.8 akan ada penyelesaian apabila dipenuhi nilai determinan yakni ,

$$\begin{vmatrix} (\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2) - \omega^2\mathrm{m}_1 & -\mathrm{k}_1 \\ -\mathrm{k}_2 & \mathrm{k}_2 - \omega^2\mathrm{m}_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.10)$$

apabila persamaan2.10 tersebut diselesaikan maka nilai determinannya adalah,

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_1\mathrm{m}_2\omega^4 - \{(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)\mathrm{m}_2 - \mathrm{k}_2\mathrm{m}_1\}\omega^2 + \\ (\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)\mathrm{k}_2 - \mathrm{k}_2^2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Selanjutnya yang akan dicari adalah nilai-nilai percepatan sudut,ω yang umumnya disebut *eigen value* dari *eigen problem* persamaan 2.4. Sehingga dapat dimengerti bahwa struktur 2 tingkat atau struktur dengan 2-derajat kebebasan akan mempunyai 2 nilai frekuensi sudut. Frekuensi sudut $\omega 1$ adalah frekuensi sudut untuk mode ke-1 atau untuk pola/ragam goyangan ke-1, sedangkan $\omega 2$ adalah frekuensi sudut untuk mode ke-2.

Subtitusi nilai ω1 kedalam pers.2.9.misalnya subtitusi pada baris pertama persamaan tersebut dengan catatan bahwaϕ_1 menjadi$\emptyset_{11}$ danϕ_2 menjadi ϕ_{21}.

Secara umum penyelesaian persamaan simultan homogen tidak akan memberikan suatu nilai yang pasti/tetap tetapi hanya diperoleh nilai perbandingan antara satu dengan yang lain.

Nilai/koordinat yang berhubungan dengan suatu massa pada setiap pola goyangan umumnya ditulis sebagai $\emptyset_{\mathrm{ij}}$dimana indeks i menunjukkan massa dan indeks j menunjukkan nomor ragam/pola goyangan. Dengan demikian $\emptyset_{\mathrm{ij}}$ adalah suatu koordinat yang berhubungan dengan massa ke-i pada ragam/pola goyangan ke-j.

Nilai-nilai koordinat yang berhubungan dengan massa struktur untuk pola goyangan ke-1 dapat ditulis menjadi,

$$\{\emptyset\}_1 = \begin{Bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{12} \end{Bmatrix} \qquad (2.12)$$

Pers. 2.12 juga disebut sebagai*eigen vector* untuk ragam/pola goyangan atau *mode shape* untuk mode ke-1. Nilai-nilai koordinat untuk ragam/pola goyangan ke-2 dapat diperoleh dengan subtitusi nilai ω2 kedalam persamaan 2.9. Misalnya disubtitusikan pada baris pertama persamaan tersebutdengan catatan ϕ_1 menjadi ϕ_{12} dan $\phi_2$menjadi ϕ_{22}.

Senada dengan persamaan.2.12, maka nilai-nilai koordinat yang berhubungan dengan massa struktur untuk ragam/pola goyangan/*mode* ke-2 dapat ditulis menjadi,

$$\{\emptyset\}_2 = \begin{Bmatrix} \emptyset_{21} \\ \emptyset_{22} \end{Bmatrix} \qquad (2.13)$$

Senada dengan persamaan 2.12, maka persamaan 2.13 juga disebut dengan *eigen vector* untuk ragam/pola goyangan *mode* ke-2. Dengan demikian struktur dengan n-derajat kebebasan akan mempunyai n-frekuensi sudut dan n-*modes.*

Sehingga persamaan2.12.dan persamaan2.13 dapat ditulis menjadi suatu matriks yang disebut modal matriks yaitu,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \emptyset_{11} & \emptyset_{21} \\ \emptyset_{12} & \emptyset_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

Setelah nilai-nilai frekuensi sudut untuk tiap-tiap mode diperoleh maka selanjutnya dapat dihitung nilai periode getar T tiap-tiap mode yaitu,

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \text{ dan} T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \tag{2.15}$$

Nilai T1 disebut periode getar dasar atau *undamped fundamental period of vibration* yang berpengaruh terhadap koefisien gempa dasar C yang tercantum pada grafik respon spektrum.

2.3 Hubungan Orthogonal

[2] *Mode shapes* diperoleh dengan suatu asumsi bahwa struktur MDOF tidak teredam.Walaupun sesungguhnya struktur selalu mempunyai redaman walaupun nilainya relatif kecil. Sehingga mode shapes yang diperoleh merupakan suatu pendekatan. Namun demikian *mode shapes* hasil pendekatan ini akan bermanfaat bagi penyelesaian masalah dinamika struktur selanjutnya.

Sebagai contoh, setelah diperoleh *mode shapes* maka terlihat adanya hubungan orthogonal, yaitu hubungan unik yang bermanfaat dalam menyelesaikan problema dinamik. Hubungan orthogonal tersebut dapat diketahui dengan menggunakan persamaan nilai eigen sebagai berikut,

$$(k - \omega^2 m)\, Ø = 0 \tag{2.16}$$

dimana [*m*], [*k*] berturut-turut adalah matriks massa dan matriks kekakuan.

Diketahui bahwa persamaan 2.16 adalah satu set persamaan simultan yang terdiri atas beberapa persamaan. Apabila persamaan simultan tersebut mempunyai n – persamaan maka persamaan tersebut akan mempunyai n – akar dan masing-masing akan memberi ordinat modes ke-1,2,...i, j....n yang ditunjukkan oleh $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_i, \phi_j, ..., \phi_n$. Untuk memulai pembahasan maka diambil persamaan nilai eigen yang menghasilkan mode ke-i, dan ke-j dari persamaan.

$$\omega_i^2 [m]\{Ø\}_i = [k]\{Ø\}_i \tag{2.17}$$

$$\omega_j^2 [m]\{Ø\}_j = [k]\{Ø\}_j \tag{2.18}$$

Apabila nilai transpose pers. 2.17 dikalikan $Ø_j$ maka akan diperoleh suatu persamaan,

$$\{\omega_i^2 [m]\{Ø\}_i\}^T \{Ø\}_j = \{ [k] \{Ø\}_i \}^T \{Ø\}_j \tag{2.19}$$

karena matriks massa dan matriks kekakuan adalah matriks simetri maka $[m]^T = [m]$ dan $[k]^T = [k]$, sehingga perkalian pada persamaan 2.19 setelah disesuaikan dengan orde matriksnya akan menjadi,

$$\omega_i^2 \{Ø\}_i^T [m] \{Ø\}_j = \{Ø\}_i^T [k] \{Ø\}_j \tag{2.20}$$

(8.21)

Apabila persamaan 2.15 dikalikan $\{\phi\}_i^T$ dan dengan mengambil sifat-sifat diatas dan dengan memperhatikan orde matriks maka akan diperoleh,

$$\omega_i^2 \{Ø\}_i^T [m] \{Ø\}_j = \{Ø\}_i^T [k] \{Ø\}j \tag{2.21}$$

Apabila diperhatikan maka ruas kanan persamaan2.20 dan persamaan2.21 adalah sama, maka apabila persamaan2.20 dikurangi dengan persamaan 2.21 akan diperoleh,

$$\{ \omega_i^2 – \omega_j^2\} \{Ø\}iT [M] \{Ø\}j = 0 \tag{2.22}$$

Persamaan 2.22 adalah suatu perkalian yang hasilnya sama dengan nol. Oleh karena itu, salah satu dari pengali tersebut harus sama dengan nol. Pada kenyataannya tidak akan dijumpai bahwa ωi = ωj sehingga nilai yang sama dengan nol adalah,

$$\{Ø\}_i^T [m] \{Ø\}_j = 0 \tag{2.23}$$

Persamaan 2.23 adalah suatu hubungan yang unik antara ordinat $Ø_j$, [*m*], dan $\{Ø\}_i^T$, apabila i tidak sama dengan j maka perkalian seperti pada pers. 2.23 (8.53) tersebut akan sama dengan nol. Kondisi yang sama juga akan diterapkan pada orthogonalitas kekakuan, yaitu apabilapersamaan2.18 dikalikan awal dengan $Ø_j^T$ .Dengan demikian akan diperoleh,

$$\omega_i^2 \{Ø\}_i^T [m] \{Ø\}_j = \{Ø\}_i^T [k] \{Ø\}_j \tag{2.24}$$

Dengan memperhatikan pers. 8.94 bahwa $Ø_j$, [*m*], dan $\{Ø\}_i^T = 0$, maka ruas kiri persamaan 2.24 akan sama dengan nol atau,

$$\{Ø\}_i^T [k] \{Ø\}_j = 0 \tag{2.25}$$

Persamaan 2.25 adalah persamaan orthogonalitas untuk kekakuan, sebagaimana senada dengan persamaan 2.23.Orthogonalitas untuk redaman tidak banyak diketahui karena persoalan redaman memang masih relatif rumit dibanding dengan massa struktur dan kekakuan tingkat. Karena keterbatasan tersebut maka kemudian diambil suatu asumsi bahwa redaman juga mempunyai sifat orthogonal sebagaimana massa dan kekakuan, sehingga,

$$\{Ø\}_i^T [c] \{Ø\}_j = 0 \tag{2.26}$$

Persamaan2.23, persamaan2.25, dan persamaan 2.26 adalah hubungan orthogonal untuk massa, kekakuan dan redaman yang mana hubungan tersebut

ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

akan sangat bermanfaat untuk menyelesaikan persoalan analisis dinamika struktur. Terdapat beberapa cara yang dapat dipakai untuk memperoleh hubungan orthogonal, cara di atas adalah hanya salah satu cara diantaranya. Sebagaimana anggapan yang diambil, makahubungan-hubungan tersebut hanya berlaku apabila:

1. Matriks massa adalah matriks diagonal
2. Martiks kekakuan adalah matriks yang simetri

Hal-hal tersebut harus dipenuhi agar$[m]^T = [m]$ dan $[k]^T = [k]$, sehingga hubungan tersebut dapat dipenuhi.

2.4Hubungan Normalisasi

Penyelesaian persamaan simultan homogen yang dalam hal ini adalah mencari koordinat *mode shapes*$Ø_{ij}$ tidaklah memberikan nilai yang pasti melainkan hanyalah merupakan perbandingan. Sebagai contoh koordinat untuk massa ke-1 $Ø_{ij}$,umumnya memberikan nilai $Ø_{ij} = 1$. Sebenarnya nilai tersebut tidak selalu diberi nilai 1, tetapi nilai apa saja asalkan nilai koordinat yang lain sebanding dengan nilai tersebut. Pengambilan nilai $Ø_{ij} =1$ tersebut sebenarnya merupakan usaha normalisasi (normalizing).

Ada cara lain untuk membuat normalisasi [3] yaitu melalui suatu skalar vektor Sc.

$$Sc = \{ Ø\}_j^T [m] \{Ø\}_j \qquad (2.27)$$

Dengan j = 1, 2, ... n adalah sembarang modes. Normalisasi elemen mode shapes $Ø_{ij}$ dapat diperoleh dengan hubungan,

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\varphi ij}{\sqrt{Sc}} \qquad (2.28)$$

Menurut Paz(1996), untuk struktur yang mempunyai matriks diagonal maka normalisasi elemen mode shapes tersebut dapat dihitung dengan,

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{\phi ij}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i \phi ij^2}} \qquad (2.29)$$

Selanjutnya nilai-nilai normalisasi elemen mode shapes tersebut dapat ditulis dalam bentuk normalized modal matriks,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{11} & \bar{\phi}_{12} & \bar{\phi}_{13} & \dots & \bar{\phi}_{1n} \\ \bar{\phi}_{21} & \bar{\phi}_{22} & \bar{\phi}_{23} & \dots & \bar{\phi}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\phi}_{n1} & \bar{\phi}_{n2} & \bar{\phi}_{n3} & \dots & \bar{\phi}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

Kemudian akan terdapat suatu hubungan,

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [I] \qquad (2.31)$$

Hubungan seperti pada persamaan 2.31 dapat dipakai untuk mengontrol koordinat *mode shapes.*

3. METODE PENELITIAN

Model sistem struktur portal bidang 2 (dua) tingkat dengan panjang bentang (B) 8,0 m dan tinggi tingkat 1 (H1) adalah 4,0 m dan tinggi tingkat 2 (H2) adalah 3,5 m. Massa total pada struktur terpusat pada bidang lantai 1 (m_1) adalah 150 kN/m dan pada lantai 2 (m_2) sebesar 80 kN/m. Kekakuan pada lantai 1 (k_1) sebesar 210 kN/m dan pada lantai 2 (k_2) sebesar 210 kN/m. Karakter-karakter struktur frekuensi sudut ω, periode getar T dan frekuensi alamistruktur akan di analisa menggunakan persamaan matematis *eigen problems*dan dibandingkan dengan yang dikeluarkan oleh perangkat lunak SAP 2000. Kemudian akan dilihat bentuk *mode sha*pe yang dihasilkan.

4. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan *free body diagram* dapat dirumuskan suatu persamaan diferensial gerakan sebagai berikut.

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0$$
$$m_2\ddot{y}_2 - k_2(y_2 - y_1) = 0$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk yang sederhana yaitu,

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = 0$$
$$m_2 y_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

selanjutnya persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sehingga persamaan eigen adalah,

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2)-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

Untuk solusi non trivial, diperlukan determinan dari koefisien matriks sama dengan nol, yaitu

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)\text{-}\omega^2 m_1 & \text{-}k_2 \\ \text{-}k_2 & k_2\text{-}\,\omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

apabila persamaan tersebut diselesaikan maka nilai determinannya adalah,

$$m_1 m_2\, \omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + m_1 k_2\}\, \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

sehingga dari persamaan tersebut diperoleh :

$$(150)\,(80)\,\omega^4 - \{(210 + 110)\,(80) + (150)\,(110)\}\,\omega^2 + (210)\,(110) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 12000\,\omega^4 - 42100\,\omega^2 + 23100 = 0$$

Hasil akar-akar persamaan yang dicari secara analitis dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \quad \omega_1^{\,2} = 0{,}6808 \quad \text{dan} \quad \omega_2^{\,2} = 2{,}8274$$
$$\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 0{,}8251 \quad \text{dan} \quad \omega_2 = 1{,}6815$$

Sehingga frekuensi natural dari sistem adalah

$$\omega_1 = 0{,}8251 \text{ rads}^{-1} \text{ dan}$$
$$\omega_2 = 1{,}6851 \text{ rads}^{-1}$$

Atau dalam siklus per detik

$$f_1 = {}^{\omega_1}/_{2\pi} = 0{,}1313 \text{ Hz}$$
$$f_2 = {}^{\omega_2}/_{2\pi} = 0{,}2676 \text{ Hz}$$

Dan periode naturalnya

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 7{,}6161 \text{ s}$$
$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 3{,}7369 \text{ s}$$

Tinjau baris pertama dalam persamaan dan subsitusi harga frekuensi natural yang pertama ω_1 = 0,8251 rads^{-1} dan diasumsikan nilai a_{11} = 1,0 sehingga diperoleh

$$\{(k_1+k_2)\text{-}\omega^2 m_1\}a_{11}\text{-}(k_2)a_{21}=0$$
$$\{(210+110)\text{-}(0{,}8251^2 \text{x } 150\}1\text{-}(110)a_{21}=0$$
$$217{,}88\, a_{11} - 110\, a_{21} = 0$$

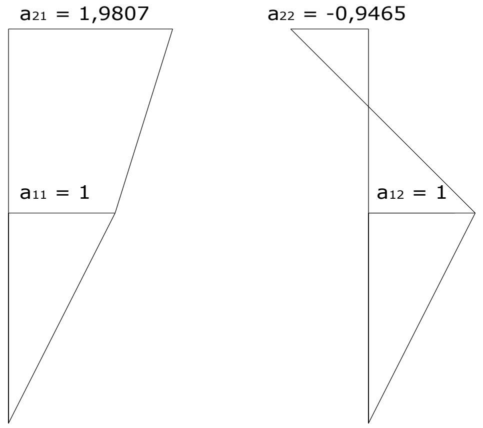
maka didapatkan nilai:

$$a_{11} = 1{,}0000$$
$$a_{21} = 1{,}9807$$

Dengan cara yang sama, disubstitusikan nilai frekuensi natural yang kedua ω_2 = 1,6815 rads^{-1} ke dalam persamaan dan diperoleh pola normal yang kedua yaitu:

$$a_{12} = 1{,}0000$$
$$a_{22} = \text{-}0{,}9465$$

Sekarang kita mendapatkan dua kemungkinan gerak harmonis dari struktur sedemikian rupa di mana semua massa bergerak dengan fase tertentu pada frekuensi yang sama, ω_1 atau ω_2. Gambar masing-masing pola yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 4.1



(a) Nilai ω_1 =0,8251 rads^{-1} (b) Nilai ω_2 = 1,6851 rads^{-1}

Gambar 4. Pola normal perubahan bentuk (a) Mode pertama dan (b) Mode kedua

Terlihat bahwa *mode* yang lebih kecil mempunyai periode getar yang lebih besar. Selanjutnya nilai ordinat *mode shape* pada tiap-tiap massa untuk semua ragam/pola goyangan digambar seperti pada Gambar 4.1

Nilai a_{ij} tersebut merupakan nilai relatif yang diberikan oleh nilai ω tertentu. Oleh karena itu nilai-nilai tersebut harus dinormalisasi dengan menggunakan persamaan berikut.

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_1^n m_k\, a_{kjx^2}}}$$

Maka nilai penyebut untuk ragam pertama (nilai frekuensi natural pertama, ω_1) adalah

$$\sqrt{(210)(1{,}0)^2 + (110)(1{,}9807)^2} = 25{,}3288$$

Sedangkan nilai penyebut untuk ragam kedua (nilai frekuensi natural kedua, ω_2) adalah

ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

$$\sqrt{(210)(1{,}0)^2 + (110)(0{,}9465)^2} = 17{,}5654$$

Maka nilai komponen-komponen ragam yang telah dinormalisasi adalah sebagai berikut.

$$\phi_{11} = \frac{1{,}0}{25{,}3288} = 0{,}0395$$
$$\phi_{21} = \frac{1{,}9807}{25{,}3288} = 0{,}0782$$
$$\phi_{12} = \frac{1}{17{,}5654} = 0{,}0569$$
$$\phi_{22} = \frac{-0{,}9465}{17{,}5654} = -0{,}0539$$

Apabila diperhatikan maka nilai-nilai ordinat *mode shapes* $\emptyset_{ij}$ tersebut tidak tergantung pada beban luar, melainkan hanya tergantung pada properti dinamik struktur, yakni massa m_1 dan kekakuan tingkat k_1. Karena struktur dianggap tak teredam sehingga periode getarnya adalah periode getaran bebas tidak teredam. Seperti pada pembahasan struktur SDOF, nilai periode getar struktur tak teredam sedikit lebih kecil dibanding dengan periode getar struktur yang teredam yakni $\omega_d < \omega$, sehingga $T < T_d$.

Selain itu nilai-nilai *mode shapes* juga tidak dipengaruhi oleh waktu. Karena nilai kekakuan tingkat k_i tidak berubah-ubah maka mode shapes hanya dimiliki oleh struktur yang bersifat elastik. Juga tampak bahwa nilai mode shapes tidak dipengaruhi oleh frekuensi beban. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa nilai-nilai *mode shapes* adalah :

a. bebas dari pengaruh redaman
b. bebas dari pengaruh waktu
c. bebas dari pengaruh frekuensi beban dan
d. hanya untuk struktur yang elastik

Pada normal dapat disusun pada kolom pada matriks yang dikenal sebagai *matriks pola(modal matrix)* dari sistem. Untuk keadaan umum, yaitu sistem berderajat kebebasan *n*, matriks pola dapat ditulis sebagai

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{3n} \end{bmatrix}$$

Komponen-komponen ragam disusun sebagai *modal matrix* menjadi sebagai berikut

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$
$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}0395 & 0{,}0569 \\ 0{,}0782 & -0{,}0539 \end{bmatrix}$$

Kondisi ortogonalitas dapat dinyatakan secara umum sebagai

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

Matriks $[\Phi]^T$ adalah matriks transpos dari $[\Phi]$, sedangkan $[M]$ adalah matriks massa sistem. Sebagai kontrol kondisi ortogonalitas, cukup dengan substitusi pola normal pada persamaan-persamaan di atas dan diperoleh hasil yang memenuhi kondisi ortogonalitas.

$$\begin{bmatrix} 0{,}0395 & 0{,}0782 \\ 0{,}0569 & -0{,}0539 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 210 & 0 \\ 0 & 110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0395 & 0{,}0569 \\ 0{,}0782 & -0{,}0539 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil Analisis yang telah diperoleh dibandingkan dengan hasil hitungan dengan menggunaan program SAP 2000. Hasil hitungan periode dan frekuensi dapat dilihat pada tabel *modal periods and frequencies*.

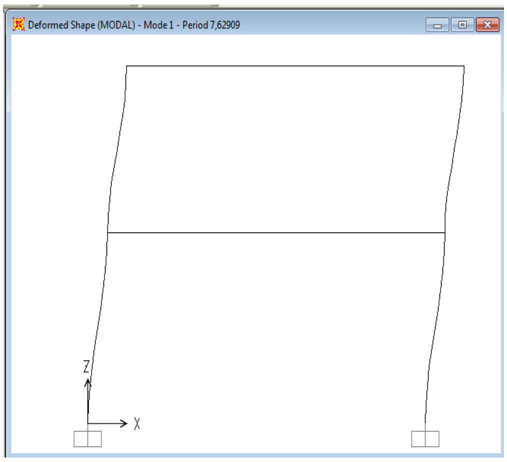
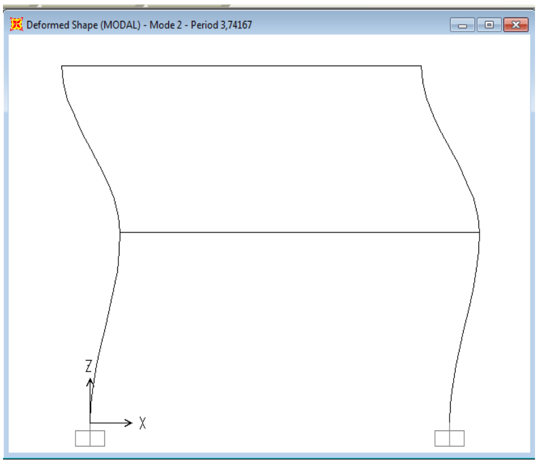
ETERNITAS Jurnal Teknik Sipil

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

SAP 2000 juga memberikan bentuk mode dari struktur sebagai berikut:

Mode 1	Mode 2
	
ω_1 = 0,8236 rads^{-1}	ω_2 = 1,6792 rads^{-1}

Gambar 5. Pola normal perubahan bentuk hasil hitungan dengan menggunakan Program SAP 2000

Tabel 1. *Modal Periods And Frequencies* Hasil SAP 2000

TABLE: Modal Periods And Frequencies						
OutputCase	**StepType**	**StepNum**	**Period**	**Frequency**	**CircFreq**	**Eigenvalue**
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec	rad/sec	rad2/sec2
MODAL	Mode	1	7,6290	0,1311	0,8236	0,6783
MODAL	Mode	2	3,7417	0,2673	1,6792	2,8199

Hasil perbandinganperhitungan matematis dari *eigen problems* dengan hasil yang dikeluarkan oleh perangkat lunak SAP 2000 disajikan dalam Tabel 4.2 sebagai berikut:

Tabel 2. Hasil Perbandingan Perhitungan Matematis dan SAP 2000

Karakter Struktur	Perhitungan Matematis		SAP 2000		Selisih	
	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2	Mode 1	Mode 2
Frekuensi sudut,ω (rad/dtk)	0,8251	1,6851	0,8236	1,6792	0,18%	0,35%
Frekuensi dalam siklus/detik (Hz)	0,1313	0,2676	0,1311	0,2673	0,15%	0,11%
Periode getar, T (dtk)	7,6161	3,7369	7,6290	3,7417	0,17%	0,13%
Eigen Value	0,6808	2,8274	0,6783	2,8199	0,37%	0,27%

Dari hasil perbandingan diperoleh bahwa besarnya selisih antara perhitungan matematis dari *eigen problems* dengan hasil yang dikeluarkan oleh perangkat lunak SAP 2000 yang paling besar adalah 0,37%

5. KESIMPULAN

Dari hasil analisis yang telah dilakukan, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Respon struktur MDOF terhadap beban dinamik lebih ditentukan oleh nilai eigen dan Idealisasi bangunan dengan prinsip shear mode memungkinkan penggunaan model matematis yang lebih sederhana.

Vol 1 No 1 (2020): ETERNITAS:Jurnal Teknik Sipil, Vol 1, No 1 April 2020

(P) ISSN : 2721-5679

(E) ISSN : xxxx-xxxx

2. Hasil selisih terbesar antara perhitungan matematis dari *eigen problems* dengan hasil yang dikeluarkan oleh perangkat lunak SAP 2000 adalah 0,37%.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Mario Paz, 1980, *Structural Dynamic*, Theory and Computations, Van Nostrand Reinhold Company.

[2] Chopra, A.K.1995."Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering", Prentice Hall, New Jersey.

[3] Ray W. Clough and Joseph Penzien, 1995." Dynamics of Structures",University Ave Berkeley USA.